E.N.S.I. P

# DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

---

Le problème consiste à étudier une méthode de définition des fonctions de matrices indépendamment de la notion de série matricielle.

Toutes les matrices intervenant dans l'énoncé sont des matrices $(n \times n)$ à termes réels. La notation $A = (a_{ij})$ signifie que $a_{ij}$ est le terme de la ligne $i$, colonne $j$ de A. On rappelle qu'on peut développer le déterminant de A selon la formule

$$\text{Det } (A) = \sum_{i=1}^{i=n} A_{ij} a_{ij} \text{ où } A_{ij} \text{ désigne le cofacteur de } a_{ij} .$$

I désigne la matrice identité. Det (A) désigne le déterminant de A. ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A. On pourra utiliser le fait que le déterminant d'un produit de matrices AB est égal au produit des déterminants de A et de B.

La partie II du problème peut être traitée indépendamment de la partie I à condition d'admettre les résultats de I 3°.

Les parties IV et V peuvent être traitées en admettant les résultats de III. On pourra admettre la formule proposée au III 2° *a*.



## I

Étant données $m + 1$ matrices $F_0, F_1, \ldots, F_m$, on appelle polynôme matriciel la matrice F définie par

$$F(\lambda) = F_0 \lambda^m + F_1 \lambda^{m-1} + \ldots + F_{m-1} \lambda + F_m \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

A toute matrice A on associe :

$$F(A) = F_0 A^m + F_1 A^{m-1} + \ldots + F_{m-1} A + F_m$$
$$\hat{F}(A) = A^m F_0 + A^{m-1} F_1 + \ldots + A F_{m-1} + F_m$$

1° A quelle condition a-t-on $F(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ ?

2° *a*. Étant donnés un polynôme matriciel $F(\lambda)$ et une matrice A, démontrer qu'il existe un polynôme matriciel $Q_D(\lambda)$, et une matrice $R_D$ indépendante de $\lambda$, tels que l'on ait :

$$F(\lambda) = Q_D(\lambda) [\lambda I - A] + R_D .$$

On dira que $F(\lambda)$ est divisible à droite par $\lambda I - A$ si $R_D$ est la matrice nulle.

*b*. Démontrer qu'il existe également un polynôme matriciel $Q_G(\lambda)$ et une matrice $R_G$ indépendante de $\lambda$, tels que l'on ait :

$$F(\lambda) = [\lambda I - A] Q_G(\lambda) + R_G .$$

On dira que $F(\lambda)$ est divisible à gauche par $\lambda I - A$ si $R_G$ est la matrice nulle. On exprimera dans chaque cas $R_D$ et $R_G$ en fonction de $F(A)$ et de $\hat{F}(A)$, et on donnera une condition nécessaire et suffisante pour que $F(\lambda)$ soit divisible à droite (respectivement à gauche) par $\lambda I - A$.

3° On désigne par $\varphi_A$ le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$\varphi_A(\lambda) = \text{Det } (\lambda I - A) ,$$

par $b_{jk}(\lambda)$ le cofacteur de $\lambda I_{jk} - a_{jk}$, enfin par $B_A(\lambda)$ la matrice dont le terme ligne $j$, colonne $k$, est $b_{kj}(\lambda)$.

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on écrira $\varphi$ et $B$ au lieu de $\varphi_A$ et $B_A$.

Montrer qu'on a

$$(\lambda I - A) B_A(\lambda) = B_A(\lambda) (\lambda I - A) = \varphi_A(\lambda) . I$$

En déduire que $\varphi_A(A) = 0$.

. . . / . . .

×94×
E.N.S.I. P
MATHEMATIQUES II
1977

## II

Soit P un polynôme scalaire, à coefficients réels :

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

On notera P(A) la matrice $P(A) = a_0 A^m + \ldots + a_{m-1} A + a_m I$.

On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$.

On désigne par $\mathfrak{P}_A$ l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

1° Montrer que $\mathfrak{P}_A$ est un idéal non réduit à $\{0\}$ dans l'ensemble des polynômes réels.

2° Montrer que $\mathfrak{P}_A$ est un idéal principal, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme unique, noté $\psi_A$ dont le coefficient du monôme de degré le plus élevé vaut 1, tel que $\mathfrak{P}_A$ coïncide avec l'ensemble des polynômes multiples de $\psi_A$.

3° On note $D_{n-1}(\lambda)$ le plus grand commun diviseur des polynômes $b_{jk}(\lambda)$, réduit de sorte que son terme de plus haut degré ait pour coefficient 1, et on pose :

$$B_A(\lambda) = D_{n-1}(\lambda)\, C_A(\lambda)$$

*a.* Montrer qu'on a $\varphi_A(\lambda)\, I = (\lambda I - A)\, C_A(\lambda) . D_{n-1}(\lambda)$ puis

$$\varphi_A(\lambda) = D_{n-1}(\lambda)\, \tilde{\psi}(\lambda) \quad \text{avec} \quad \tilde{\psi} \in \mathfrak{P}_A$$

($\varphi_A$ désigne toujours le polynôme caractéristique de A).

*b.* Montrer que $\tilde{\psi} = \psi_A$.

4° Montrer que $[\psi_A(\lambda)]^n = \varphi_A(\lambda) . \mathrm{Det}\,[C_A(\lambda)]$.

En déduire que toutes les valeurs propres réelles ou complexes, distinctes, de A sont les zéros du polynôme $\psi_A$ associé.

On écrira désormais

$$\psi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} . (\lambda-\lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

5° Soient P et Q deux éléments de $\mathfrak{P}_A$. En utilisant l'existence d'un polynôme S tel que

$$P \equiv Q + S\,\psi_A$$

montrer qu'on a $P(\lambda_j) = Q(\lambda_j)$,

$P'(\lambda_j) = Q'(\lambda_j), \ldots, P^{(m_j-1)}(\lambda_j) = Q^{(m_j-1)}(\lambda_j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, s$

($P'(\lambda)$ est la dérivée de $P(\lambda)$ par rapport à $\lambda$, etc.).



## III

Soit A une matrice $n \times n$ donnée, de polynôme associé $\psi_A$ (dont les racines sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$). Soit $f$ une fonction réelle telle que les nombres $f(\lambda_j), f'(\lambda_j), \ldots, f^{(m_j-1)}(\lambda_j)$ $j = 1, 2, \ldots, s$ soient définis. On dit alors que $f$ est définie sur le spectre de A.

Supposons qu'il existe un polynôme scalaire P tel que

$f(\lambda_j) = P(\lambda_j)$, $f'(\lambda_j) = P'(\lambda_j), \ldots, f^{(m_j-1)}(\lambda_j) = P^{(m_j-1)}(\lambda_j)$ $j = 1, 2, \ldots, s$.

On définira alors $f(A)$ par $f(A) = P(A)$.

1° Justifier cette définition lorsque $f$ est un polynôme.

2° *a.* Établir la formule de dérivation :

$u_1, u_2, \ldots, u_r$ étant des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre $m$, on a :

$$\frac{d^m}{d\lambda^m}\Big[u_1(\lambda)u_2(\lambda)\ldots u_r(\lambda)\Big] = \sum_{\{\nu\}} \frac{m!}{\nu_1!\ldots\nu_r!}\, u_1^{(\nu_1)}(\lambda)\ldots u_r^{(\nu_r)}(\lambda)$$

où $\{\nu\} = \{\nu_1, \ldots, \nu_r \,|\, \nu_j \in \mathbb{N}$ tout $j$ et $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = m\}$

*b.* Vérifier que le polynôme R défini par :

$$R(\lambda) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{\rho=0}^{m_k-1} \frac{1}{(m_k-\rho-1)!} \left\{ \frac{d^{m_k-\rho-1}}{d\lambda^{m_k-\rho-1}} \frac{f(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right\}_{\lambda\ \lambda_k} \frac{\psi_A(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{\rho+1}}$$

où $\psi_k(\lambda) = \dfrac{\psi_A(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}$

répond aux conditions ci-dessus. On l'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange Sylvester.

. . . / . . .

×955×

3° On peut écrire R sous la forme

$$R(\lambda) = \sum_{k=1}^{s} \left\{ f(\lambda_k)\ Q_{k_1}(\lambda) + f'(\lambda_k)\ Q_{k_2}(\lambda) + \dots\dots \right.$$
$$\left. + f^{(m_k-1)}(\lambda_k)\ Q_{k_{m_k}}(\lambda) \right\}$$

où les $Q_{k_j}$ sont des polynômes scalaires. On pose $Z_{k_j} = Q_{k_j}(A)$.

Montrer que

*a.* Les matrices $Z_{k_j}$ ne dépendent pas de la fonction $f$ ;

*b.* Les matrices $Z_{k_j}$ sont linéairement indépendantes;

*c.* Aucune des $Z_{k_j}$ n'est nulle.

4° En appliquant ce qui précède à la fonction $f$ définie par

$$f(\mu) = \frac{1}{\lambda - \mu}$$

montrer qu'on a :

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{C_A(\lambda)}{\psi_A(\lambda)} = \sum_{k=1}^{s} \left( \frac{Z_{k_1}}{\lambda - \lambda_k} + \frac{Z_{k_2}}{(\lambda-\lambda_k)^2} + \frac{2!\,Z_{k_3}}{(\lambda-\lambda_k)^3} + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{(m_k-1)!\,Z_{k_{m_k}}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}} \right) \text{ et donc que}$$

$$Z_{k_j} = \frac{1}{(j-1)!\,(m_k-j)!} \left( \frac{d^{m_k-j}}{d\lambda^{m_k-j}} \frac{C_A(\lambda)}{\psi_k(\lambda)} \right)_{\lambda=\lambda_k}.$$



## IV

On demande dans ce paragraphe d'appliquer un certain nombre de résultats présentés ci-dessus à la matrice particulière

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1° Calculer successivement $\varphi_A$ et $\psi_A$ ;

2° Soit $f$ telle que $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, où $t$ est un nombre réel. Écrire son polynôme d'interpolation de Lagrange Sylvester dans le spectre de A.

3° En déduire une expression de $e^{At}$ sous forme d'une combinaison linéaire des matrices I, A, $A^2$.

4° Enfin, après avoir calculé $A^2$, donner une forme simple de $e^{At}$.

5° Déterminer les matrices $Z_{k_j}$ associées à A.

## V

Soient $G(u_1, \dots, u_r)$ un polynôme en $u_1, \dots, u_r$, et $r$ fonctions réelles $f_1, \dots f_r$ définies dans le spectre d'une matrice A donnée.

On pose $g(\lambda) = G(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda))$.

1° Montrer que si $g(\lambda)$ s'annule sur le spectre de A, alors $g(A) = 0$.

2° *Applications* : montrer qu'on a les identités suivantes :

$$\sin^2 A + \cos^2 A = I$$
$$e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$$

FIN

×966×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail